EQUACIONS FUNCIONALS

Claudi Alsina i Català

El gran motor de les matemàtiques és la resolució de problemes, activitat en la qual es combinen enginy i coneixement, mètode científic i aventura intelectual. En aquest petit article us voldriem aproximar a la resolució d'unes equacions molt especials dites equacions funcionals.

La teoria d'equacions funcionals ha nascut aquest segle de la mà d'un gran matemàtic hongarès: el professor Janos Aczél. Els precedents històrics són moltes contribucions disperses de J. D'Alembert, L. Euler, L.A. Cauchy, A.M. Legendre, C.F. Gauss, etc., que a partir del naixement del concepte de funció estudiaren algunes equacions on les incògnites eren funcions. Avui hi ha uns 200 matemàtics al món dedicats a resoldre aquestes equacions les quals neixen o de la pròpia matemàtica o de molts camps d'aplicació com són l'economia, la computació, la física, l'estadística, etc.

Aquí farem una presentació senzilla d'equacions funcionals per tal que si teniu ocasió de participar en olimpíades matemàtiques, on sovint hi ha problemes amb aquestes equacions, sapigueu com atacar-los. Resoldre aquestes equacions és una activitat matemàtica apassionant a la que tots i totes hi esteu convidats ara i sempre.

Però... què és una equació funcional?

Amb llenguatge senzill podem dir que una *equació funcional* és una igualtat on l'incògnita és una funció (o diverses).

Observeu les següents igualtats:

(1) $2+2=4$ (2) $8x^2+x-1=0$ (3) $f(x \cdot y) = f(x) + y$

El cas (1) és una identitat aritmètica, el cas (2) és una equació algebraica de segon grau on l'incògnita x podrà ser aïllada mitjançant un procès que ens portarà als possibles valors numèrics solució. El cas (3) és una equació funcional: desitgem saber quines funcions f poden satisfer la relació donada en (3).

Les següents expressions són equacions funcionals:

(4) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (5) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

(6) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ (7) $f(x^2) = 2f(x)$

(8) $f(f(x)) = x$ (9) $f(x^2) + f(x) = \sin x$

En els casos (4), (5) i (6) trobem *equacions funcionals amb diverses variables* (x, y) mentres que en (7), (8) i (9) veiem *equacions funcionals en una sola variable* (x). En tots aquests casos la funció incògnita f és d'una variable. També hi ha equacions amb diverses funcions incògnites i amb funcions de diverses variables.

L'equació més emblemàtica

Per la seva llarga història, i per la seva constant presència en la resolució de moltes altres equacions, destaca amb llum pròpia l'equació funcional de Cauchy:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Fent $x = y = 0$ resulta $f(0) = 0$ i aleshores fent $y = -x$ resulta $f(-x) = -f(x)$. En els nombres naturals hom obté:

$$f(n) = f(1 + \overset{n}{\smile}\!\!\!\!\cdots +1) = f(1) + \overset{n}{\smile}\!\!\!\!\cdots + f(1) = f(1) \cdot n.$$

En els nombres enters, vist que $f(+n) = f(1) \cdot (+n)$ en els positius, $f(0) = 0$ i $f(-n) = f((-1)n) = -f(n) = f(1)(-n)$ també resulta que $f(x) = f(1) \cdot x$. En els nombres racionals m/n amb $m, n > 0$ serà

$$f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + \overset{n}{\smile}\!\!\!\!\cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n,$$

o sigui $f(1/n) = f(1)/n$ i per tant

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \overset{n}{\smile}\!\!\!\!\cdots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot m = f(1)\frac{m}{n}$$

i d'aquí $f(x) = f(1) \cdot x$.

En els nombres reals poden existir infinites solucions de l'equació de Cauchy diferents de $f(x) = f(1) \cdot x$ si hom no suposa cap condició especial a f. Però si es suposa que f és contínua en la recta real o f és contínua en un punt o f és creixent o decreixent, o f es positiva en un interval, etc. aleshores $f(x) = f(1) \cdot x$ és l'única solució. La idea bàsica és que si $f(x) = f(1)x$ en els racionals i suposem continuïtat, com que qualsevol real es pot aproximar per racionals aleshores passant al límit també serà $f(x) = f(1)x$ per a qualsevol real x.

Equacions relacionades amb la de Cauchy i molt bàsiques són les següents:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

que té com a solucions contínues $f(x) \equiv 0$ i $f(x) = e^{cx}$. Si considerem l'equació

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

vàlida per tot $x, y > 0$ i f és contínua aleshores $f(x) = c \ln |x|$. Si

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

les solucions contínues són $f(x) = |x|^c$ ($|\quad|$ indica valor absolut), $f(x) = 0$ i $f(x) = |x|^c \cdot \text{signe}(x)$. Si mirem l'equació de Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

les solucions contínues són rectes $f(x) = ax + b$. En el cas de l'equació de D'Alembert

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$$

trobem les solucions contínues $f(x) \equiv 0$, $f(x) = \cos bx$, $f(x) = \cosh bx$ (cosinus hiperbòlic). Cal notar com apareixen solucions amb constants arbitràries però que hi ha casos en que les solucions poden dependre de funcions arbitràries. Això passa molt amb les equacions d'una sola variable. D'una equació o condició tal com $f(-x) = f(x)$ el màxim que podriem dir es que la seva solució és

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \leq 0, \\ g(-x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

on g és una funció arbitrària definida en els reals no positius.

Que és el primer que cal mirar en una equació funcional?

Hi ha diverses informacions, explícites o implícites, que són importants d'observar en considerar una equació funcional:

(a) *Quin és el domini?*

Pot tractar-se de funcions definides en nombres naturals, enters, racionals, reals, complexos... o en un subconjunt d'aquests o en vectors, o matrius o d'altres funcions... Quins elements distingits hi ha en el domini i quina estructura hi coneixem? Això ajudarà a fer substitucions o a operar.

(b) *Quin és el conjunt de valors?*

Pot tractar-se de funcions que pren valors en el mateix domini o en un altre conjunt... i això pot delimitar les solucions possibles.

(c) *Quines funcions o operacions conegudes hi ha?*

Ben segur que a l'equació hi ha moltes vegades, junt a la funció incògnita, algunes funcions conegudes que ens seran d'ajut en fer càlculs.

(d) *Quines condicions satisfà la funció incògnita?*

A més de l'equació podem tenir condicions addicionals com continuïtat, creixement, positivitat,... etc. Aquestes condicions ens han de permetre fer determinades operacions i a la vegada ens delimitaran les solucions que cerquem.

Problema. Determineu les funcions $f(x)$ definides en els enters i que prenen valors reals positius que són estrictament creixents i satisfan l'equació

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y.$$

Aquí tant x com y són enters; $f(x+y)$ i $f(x)$ són reals positius; en l'equació apareixen les funcions conegudes $x+y$ (suma), $a \cdot b$ (producte) i e^y (exponencial). Volem f estrictament creixent.

Per exemple, fent la substitució $x = 0$ tindrem

$$f(y) = f(0+y) = f(0) \cdot e^y$$

que determina totalment $f(y)$, llevat d'una constant arbitrària $f(0)$ que haurà de ser positiva. Noteu que si feu la substitució $y = 0$ no sortiria res $(f(x) = f(x))$ i que si no s'haguès dit res sobre el creixement estricte de f hauria pogut sortir la solució $f(y) \equiv 0$ (amb $f(0) = 0$) o $f(y) = f(0) \cdot e^y$ amb $f(0)$ qualsevol valor. Si s'haguès dit que f prenia valors enters i res sobre creixement hauria sortit $f(y) = f(0)e^y$ la qual cosa donaria valors enters sols en el cas $f(0) = 0$.

Set bons consells que podeu fer vostres

Avui es coneixen bastants mètodes per a resoldre equacions funcionals. Alguns són senzills i ràpids. D'altres són sofisticats i lents. Però triar un bon mètode és, i serà sempre, un art. Cada equació és un repte que exigeix fer-hi feina i posar-hi imaginació. L'ofici matemàtic ens porta no sols a resoldre aquestes equacions sino també a fer-ho de la manera més simple possible, la més elegant. Per ajudar-vos a resoldre equacions senzilles us oferim set consells que podeu tenir en compte.

I. Una mateixa equació pot tenir solucions diferents en dominis diferents o en rangs diferents o en classes de funcions diferents.

En efecte, considerem l'equació

$$(*) \qquad f(xy) = f(x) + f(y).$$

Si suposem que el nombre zero pertany al domini de la funció podem fer $x = y = 0$ en (*) i surt $f(0) = f(0) + f(0)$ o sigui $f(0) = 0$ i fent ara la substitució $y = 0$ en (*) on deixarem la variable x arbitrària tindrem $f(x \cdot 0) = f(x) + f(0)$, és a dir, $f(x) \equiv 0$. Així sols la funció zero és solució de (*) quan el nombre 0 és del domini de f. En canvi si el zero no pertany al domini l'equació (*) pot tenir altres solucions com $f(x) = \log|x|$. Seguint explotant (*) podem notar que si l'imatge de f estés situada en els nombres reals positius aleshores $\log|x|$ no seria solució i si volguesim veure solucions f de (*) estrictament creixents de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ en $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, en ser $f(y) > 0$ i tenir $f(x) < f(x) + f(y) = f(xy)$ aleshores per $0 < x, y < 1$ seria $xy < x$ i $f(x) < f(xy) < f(x)$ contradicció que ens diu la no existència de solucions estrictament creixents.

II. Feu substitucions de les variables per valors numèrics i intenteu treure el màxim profit del coneixement de la funció en certs valors... jugant amb la pròpia equació i extenent les solucions d'uns dominis a d'altres més amplis.

D'acord amb el domini de les funcions incògnites és recomanable fer substitucions de les variables per valors especialment rellevants per al domini i per a l'equació. Per exemple, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2^k$, $x = -1$,... anar mirant com es comporta la funció en punts concrets o en subconjunts interessants del domini (nombres naturals, potències de dos, nombres primers, nombres enters, nombres racionals,...).

Problema (CMO 75). Sigui f una funció dotada de les següents propietats:
(1) $f(n)$ està definida per qualsevol enter positiu n;
(2) $f(n)$ és un nombre enter;
(3) $f(2) = 2$;
(4) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ per a tots els enters positius n i m;
(5) $f(m) > f(n)$ sempre que $m > n$.
Demostreu que $f(n) = n$ per a tot enter positiu.

Solució. Combinant (3) i (4) resulta $f(2^k) = 2^k$ per tot $k = 0, 1, 2, \ldots$ Tenint en compte que

$$2^k < 2^k + 1 < 2^k + 2 < \ldots < 2^k + 2^k - 1 < 2^{k+1},$$

resultarà per als valors de f:

$$2^k = f(2^k) < f(2^k + 1) < \ldots < f(2^{k+1} - 1) < f(2^{k+1}) = 2^{k+1},$$

la qual cosa diu que entre 2^k i 2^{k+1} hi ha $2^{k+1} - 2^k - 1 = 2^k - 1$ enters diferents. Per tant $f(2^k + j) = 2^k + j$, i $f(n) = n$ per a tot n.

Problema (AMO 95) Determineu totes les funcions que prenen valors reals i definides en el conjunt dels nombres reals positius tals que:
(1) $f(xy) = f(x)f\left(\frac{3}{y}\right) + f(y)f\left(\frac{3}{x}\right)$ per a x, y reals positius;
(2) $f(1) = \frac{1}{2}$.

Solució: Usant (2) i (1) amb $x = y = 1$ resulta $f(3) = 1/2$ i fent $y = 1$ en (1) tindrem aleshores $f(x) = f(x)f(3) + f(1)f\left(\frac{3}{x}\right)$, és a dir, $f(3/x) = f(x)$. Aquesta descoberta ens permet reescriure (1) en la forma $f(xy) = 2f(x)f(y)$ i fent $x = y$ tindrem

$$\begin{aligned} 2f(x)^2 = f(x^2) &= f(x) \cdot f\left(\frac{3}{x}\right) + f(x)f\left(\frac{3}{x}\right) \\ &= f\left(x \cdot \frac{3}{x}\right) = f(3) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

és a dir, $f(x)^2 = 1/4$ i per tant

$$f(x) = f(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}) = 2f(\sqrt{x})f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = 2f(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}.$$

Problema (TELECOM 93 AMO) Per a cada funció definida en tots els reals i satisfent:
(i) $f(x\cdot y) = x\cdot f(y) + f(x)\cdot y$;
(ii) $f(x+y) = f(x^{1993}) + f(y^{1993})$;
determineu el valor $f(\sqrt{5753})$.

Solució. Fent $x = y = 1$ en (i) resulta $f(1) = 0$ i fent $x = y = 0$ en (ii) surt $f(0) = 0$. Si aleshores fem $y = 0$ en (ii) serà $f(x) = f(x+0) = f(x^{1993}) + f(0) = f(x^{1993})$, és a dir, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i per tant en els naturals serà $f(n) = f(1)\cdot n = 0$. Usant ara (i) serà per a $x = y = \sqrt{5753}$, $2\sqrt{5753}f(\sqrt{5753}) = f(5753) = 0$ o sigui $f(\sqrt{5753}) = 0$.

III. Feu canvis de variables o substitucions que lliguin les variables entre sí i estudieu les equacions que resulten en aquests dominis restringits

Si en una equació amb dues variables x, y feu $y = x$ us quedarà una equació d'una sola variable per analitzar. També podeu fer proves de l'estil $y = tx$, $y = x^2$,... podeu combinar perfectament aquestes "noves" equacions amb les de partida.

Problema (AMO 91) Demostreu que hi ha exactament una funció f definida en tots els reals no nuls que satisfà
(i) $f(x) = xf(1/x)$, per tot real x no nul;
(ii) $f(x) + f(y) = 1 + f(x+y)$, per tota parella (x, y) de reals no nuls i tals que $x \neq -y$.

Solució. Fent la substitució $x = y = t/2$ en (i) i (ii) resulta

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2}f\left(\frac{2}{t}\right) \qquad \text{i} \qquad 2f\left(\frac{t}{2}\right) = 1 + f(t),$$

i combinant ambdues expressions tenim

$$\frac{1+f(t)}{t} = \frac{2}{t}f\left(\frac{t}{2}\right) = f\left(\frac{2}{t}\right) = 2f\left(\frac{1}{t}\right) - 1 = \frac{2}{t}f(t) - 1,$$

és a dir, $f(t) = 1 + t$. És immediat verificar que $1 + t$ satisfà les condicions inicials.

IV. Observeu l'equació funcional amb detall i esbrineu si coneixeu d'entrada alguna solució. Aquesta informació pot ser molt útil per a resoldre-la.

En efecte si $f_0(x)$ és una solució particular que es veu a ull podeu, per exemple, introduir una nova funció $h(x) = f(x) - f_0(x)$ i intentar veure si l'equació satisfeta per $h(x)$ porta a $h(x) \equiv 0$. També podriem introduir $h(x) = f(x)/f_0(x)$ si f_0 mai no s'anul·lés i intentar veure si $h(x) \equiv 1$.

Problema (TELECOM 94 AMO) Determineu totes les funcions f, definides en tots els nombres racionals i amb valors reals, tals que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Solució. Mirant l'equació amb ulls atents descobrim que sabem veure almenys la solució $f(x) = x^2$ ja que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$. Introduïm aleshores la funció $h(x) = f(x) - x^2$ i mirem quina equació satisfarà:

$$\begin{aligned} h(x+y) + (x+y)^2 &= f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \\ &\qquad h(x) + x^2 + h(y) + y^2 + 2xy, \end{aligned}$$

i simplificant resulta $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Així amb gran alegria retrobem l'equació de Cauchy i ja sabem que $h(x) = c \cdot x$ en els x racionals. Per tant, haurà de ser $f(x) = h(x) + x^2 = cx + x^2$. Però hem de comprovar si realment aquesta funció és solució per a qualsevol valor de c:

$$f(x+y) = c(x+y) + (x+y)^2 = cx + x^2 + cy + y^2 + 2xy = f(x) + f(y) + 2xy.$$

Feina ben feta! Finalment s'ha resolt totalment el problema.

V. Intenteu introduir canvis funcionals que us permetin passar de l'equació donada a un altre ja coneguda... i torneu endarrera desfent el canvi.

Això ho fem sempre resolent problemes de matemàtiques: aprofitar problemes coneguts per a resoldre'n d'altres.

Problema. Trobeu les funcions f definides en els nombres racionals i amb valors reals positius que satisfan l'equació

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

per a qualssevol x, y reals.

Solució. Coneixent la funció logaritme neperià i aplicant-la als dos membres de l'equació (la qual cosa té sentit ja que suposem $f(x)$ estrictament positiva):

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y),$$

Així la nova funció $g(x) = \ln f(x)$ satisfà l'equació de Cauchy en els racionals i per tant serà $g(x) = g(1)x$, és a dir, $\ln f(x) = \ln f(1) \cdot x$, o sigui, $f(x) = e^{\ln f(1) \cdot x}$, essent $\ln f(1) = k$ una constant. És facil veure que la funció e^{kx} satisfà l'equació qualsevol que sigui k. Noteu que per $k = 0$ tenim la solució constant $f(x) \equiv 1$.

VI. Tenint en compte la pròpia equació funcional i les condicions requerides a la funció incògnita podeu deduir noves condicions de la funció... que a la seva vegada poden ajudar a resoldre l'equació.

Sovint trobareu equacions i condicions sobre les funcions incògnites tals como ser creixent, decreixent, positiva, continua, derivable, bijectiva,... aleshores mireu si l'equació us permet deduir alguna condició més.

Problema. Una funció f definida en els nombres reals i a valors reals positius satisfà l'equació $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Proveu que f es estrictament creixent.

Solució. Com que $f(z) > 0$ per a tot real z aleshores si $x < y$ serà $f(y) = f(x+(y-x)) = f(x) + f(y-x) > f(x)$ i per tant f és estrictament creixent.

Problema (AMOC 95). Sigui f una funció, definida en tots els nombres reals i prenent valors reals no nuls, tal que

$$f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$$

per a tot x. Proveu que f és periódica, és a dir, existeix un nombre positiu P tal que $f(x+P) = f(x)$ per a tots els nombres reals x.

Solució. Caldrà manipular directament l'equació donada fins a fer apareixer la condició de periodicitat:

$$\begin{aligned} f(x+6) &= f(x+4+2) = f(x+4-1)f(x+4+5) \\ &= f(x+3)f(x+9) = f(x+1+2)f(x+9) \\ &= f(x) \cdot f(x+6) \cdot f(x+9), \end{aligned}$$

i essent f mai nul·la, resulta $f(x+9) = 1/f(x)$ d'on $f(x+18) = f(x+9+9) = \frac{1}{f(x+9)} = f(x)$. Vet aquí que el període buscat és $P = 18$ (o un dels seus múltiples!).

VII. Cal verificar sempre si les funcions obtingudes resolent una equació funcional són realment solucions de l'equació de partida.

Com que en resoldre una equació fem substitucions, igualtats o relacions entre variables, etc., pot ser que surti una funció que essent solució d'una de les equacions intermèdies no ho sigui de l'equació inicial. I també pot succeir que en verificar si una "aparent" solució ho és realment ens veiem forçats a restringit la classe de solucions.

Problema. Trobeu les funcions f, definides en els nombres reals i a valors reals, que satisfan l'equació funcional

$$f(x^2 + y) = f(x) + y^2,$$

per a tots els x, y reals.

Solució. Fent la substitució $x = 0$ resulta $f(y) = f(0) + y^2$, però en verificar si aquesta funció satisfà l'equació de partida ens trobem que hauria de ser

$$f(0) + (x^2 + y)^2 = f(0) + x^2 + y^2,$$

que és impossible. Per tant l'equació donada no té solució.

Problema (CMO 68). Sigui k un enter positiu. Trobeu tots els polinomis $P(x)$ amb coeficients reals satisfent l'equació $P(P(x)) = P(x)^k$.

Solució. Sigui $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ de grau n. Si $P(x)$ ha de satisfer $P(P(x)) = P(x)^k$, deurà ser: grau $P(P(x)) = n^2 =$ grau $P(x)^k = n \cdot k$, o sigui, $n^2 = nk$, la qual cosa porta als casos $n = 0$ o $n = k$. Si $n = 0$ serà $P(x) = a_0$ constant i en satisfer-se $a_0^k = a_0$ resultarà que si $k = 1$, a_0 es qualsevol constant però si $k \neq 1$ necessàriament $a_0 = 0$ o $a_0 = 1$. Si $n = k$ i $a_k \neq 0$, mirant els coeficients de x^{k^2} en la igualtat $P(P(x)) = P(x)^k$ resulta $a_k^{k+1} = a_k^k$ d'on $a_k = 1$. Aleshores (feu-ho!) surt també $a_{k-1} = a_{k-2} = ... = a_1 = a_0 = 0$ resultant en aquest cas $P(x) = x^k$.

Problemes.

Els següents problemes han sortit en l'Olimpíada Matemàtica Internacional (IMO) o en l'Austrialana (AMO). Són vint reptes que podeu intentar resoldre. En l'apartat final d'indicacions podrem confirmar les solucions trobades o si aneu perduts veure com podríeu començar.

EF1.–(IMO 68). Sigui f una funció real definida per a tots els nombres reals x i tal que, per alguna constant positiva a, f satisfà l'equació $f(x+a) = \frac{1}{2} + \left(f(x) - [f(x)]^2\right)^{1/2}$, per a tot x. Demostreu que la funció f és periódica (és a dir, existeix un nombre positiu b tal que $f(x+b) = f(x)$ per a tot x). Per $a = 1$, doneu un exemple d'una funció no constant que satisfaci les propietats esmentades anteriorment.

EF2.–(IMO 72). Siguin f i g funcions reals definides per a tots els valors reals x, y i satisfent l'equació $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$, per tots els x, y. Demostreu que si $f(x)$ no és idénticament zero i si $|f(x)| \leq 1$ per a tot x, aleshores $|g(y)| \leq 1$, per a tot y.

EF3.–(IMO 75). Trobeu tots els polinomis P de dues variables que satisfan les següents condicions:

(i) Per a un enter positiu n i per a tots els reals t, x, y és $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$; és a dir, P es homogeni de grau n.

(ii) Per a tots els reals a, b, c, és

$$P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0,$$

(iii) $P(1, 0) = 1$.

EF4.–(IMO 77). Sigui $f(n)$ una funció definida en el conjunt de tots els enters positius i amb valors en el mateix conjunt. Demostreu que si $f(n+1) > f(f(n))$ per a qualsevol enter positiu n, aleshores $f(n) = n$, per a tot n.

EF5.–(IMO 78). El conjunt de tots els enters positius és la unió de dos subconjunts disjunts $\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}$ i $\{g(1), g(2), ..., g(n), ...\}$, ón $f(1) < f(2) < ... < f(n) < ...$, $g(1) < g(2) < ... < g(n) < ...$ i $g(n) = f(f(n)) + 1$ per a qualsevol $n \geq 1$. Determineu $f(240)$.

EF6.–(IMO 81). La funció $f(x, y)$ satisfà les equacions:

(1) $f(0, y) = y+1$, (2) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$, (3) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$,

per a tots els enters no-negatius x, y. Determineu $f(4, 1981)$.

EF7.–(IMO 82). La funció $f(n)$ està definida per a tots els enters positius n i pren valors enters no negatius. Ademès, per a tot m, n és $f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ o 1, $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ i $f(9999) = 3333$. Determineu $f(1982)$.

EF8.–(IMO 83). Trobeu totes les funcions f definides en el conjunt dels nombres reals positius prenent valors reals positius i satisfent les condicions: $f(x \cdot f(y)) = yf(x)$ per a tots els positius x, y; $f(x) \to 0$ quan $x \to \infty$.

EF9.–Determineu totes les funcions contínues f tals que, per a tots els valors reals x, y, $f(x+y) \cdot f(x-y) = \{f(x) \cdot f(y)\}^2$.

EF10.–(IMO 86). Trobeu totes les funcions f, definides en els nombres reals no negatius i prenent valors reals no negatius, tals que

(i) $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ per tot $x, y \geq 0$;

(ii) $f(2) = 0$;

(iii) $f(x) \neq 0$ si $0 \leq x < 2$.

EF11.–(IMO 87). Demostreu que no pot existir una funció f del conjunt dels enters no negatius en ell mateix tal que $f(f(n)) = n + 1987$ per a tot n.

EF12.–Una funció $f(m,n)$ està definida, per a tots els enters positius $m \geq n$, per:

(i) $f(m,n) = \sqrt{n + f(m, n+1)}$, si $m > n$;

(ii) $f(n,n) = \sqrt{n}$; per a tot n.

Proveu que $f(1988, 1) < 2$.

EF13.–(IMO 88). Una funció f està definida en els enters positius per $f(1) = 1$; $f(3) = 3$; $f(2n) = f(n)$; $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$; $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$; per a tots els enters positius n. Determineu el nombre d'enters positius n, menors o iguals que 1988, per als quals $f(n) = n$.

EF14.–(AMO 88). Una funció f satisfà les següents condicions

(i) Per a cada nombre racional x, $f(x)$ és un nombre real;

(ii) $f(1988) \neq f(1987)$;

(iii) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) - f(xy) + 1$, per tots els racionals x, y.

Demostreu que $f(-1987/1988) = 1/1988$.

EF15.–(AMO 89). Sigui $f(n)$ definida per a tots els enters positius n. Se sap que

(i) $f(f(n)) = 4n + 9$, per a tot enter positiu n;

(ii) $f(2^k) = 2^{k+1} + 3$, per a tot enter no negatiu k.

Determineu $f(1789)$.

EF16.–(IMO 90). Sigui $\mathbb{Q}^+$ el conjunt de nombres racionals positius. Construiu una funció $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tal que $f(xf(y)) = f(x)/y$, per a tots x, y en $\mathbb{Q}^+$.

EF17.–(AMO 90). Sigui f una funció definida en tots els nombres reals i amb valors reals. Suposem que, per a tots els reals x, y, la funció f satisfà

(1) $f(2x) = f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi y}{2}\right)\right)$;

(2) $f(x^2 - y^2) = (x+y)f(x-y) + (x-y)f(x+y)$.

Demostreu que aquestes condicions determinen unívocament $f(1990 + 1990^{1/2} + 1990^{1/3})$ i doneu el seu valor.

EF18.–(IMO 92). Sigui $\mathbb{R}$ el conjunt dels nombres reals. Trobeu totes les funcions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tals que $f(x^2+f(y))=y+f(x)^2$, per a tot x,y en $\mathbb{R}$.

EF19.–(IMO 93). Sigui $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$. Determineu si pot existir una funció $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $f(1)=2$, $f(f(n))=f(n)+n$ per a tot n en $\mathbb{N}$ i $f(n)<f(n+1)$, per tot n en $\mathbb{N}$.

EF20.–(IMO 94). Sigui S el conjunt de nombres reals estrictament més grans que -1. Trobeu totes les funcions $f:S\to S$ satisfent les dues condicions:

(a) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$, per a tot x,y en S;

(b) $f(x)/x$ és estrictament creixent en cada un dels intervals $-1<x<0$ i $0<x$.

Indicacions per a llegir... si cal.

EF1. Fixeu l'atenció en el periode $b=2a$. Considereu l'exemple $\left(1+\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|\right)/2$.

EF2. Suposeu que existis un punt y_0 on fos $|g(y_0)|>1$ i per ser $|f(x)|$ afitada considereu M la menor fita superior. Emprant l'equació obtindreu una contradicció.

EF3. Fent les substitucions $b=1-a$, $c=0$ i $c=1-a-b$ podreu verificar que $f(x)=P(x,1-x)+2$ satisfà l'equació bàsica de Cauchy. D'ací i usant (i) arrivareu a $P(x,y)=(x+y)^{n-1}(x-2y)$.

EF4. Raoneu perquè $1\le f(1)<f(2)<f(3)<...$ i que passaria si existís un enter positiu k tal que $f(k)>k$.

EF5. Com sigui que $g(1)=f(f(1))+1>1$, $f(1)=1$ i $g(1)=2$. Demostreu aleshores que si $f(n)=k$ necessàriament és $f(k)=k+n-1$, $g(n)=k+n$ i $f(k+1)=k+n+1$. Emprant aquestes relacions provareu que $f(240)=388$.

EF6. A partir de les equacions determineu que $f(1,y)=y+2$, $f(2,y)=2y+3$, $f(3,y)=2^{y+3}-3$ i finalment $f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-3$ (on hi han $y+3$ dosos en el primer terme).

EF7. Demostrareu que $f(n \cdot 3) \geq n$ i $f(3 \cdot n) = n$ si $n \leq 3333$. Usant $f(m+n) \geq f(m) + f(n)$ establireu que $1982 \geq 3f(1982)$ i $f(1982) \geq 660$ o sigui $f(1982) = 660$.

EF8. Estudieu els possibles punts fixes de f. Provareu que $f(x) = 1/x$.

EF9. Demostreu que $f(-x) = f(x)$, $f(x) > 0$ i per inducció $f(nx) = [f(x)]^{n^2}$. D'aquí provareu que $f\left(\frac{m}{n}\right) = (f(1))^{m^2/n^2}$ i per continuïtat $f(x) = f(1)^{x^2}$.

EF10. Observeu que $f(x) = 0$ si $x \geq 2$ i $f(y) = 2/(2-y)$ si $0 \leq y < 2$.

EF11. Si existís una funció f satisfent la condició donada seria $f(n+1987) = f(n)+1987$; $g(n) = f(n) - 1987$ seria inversa de f i $\{n | 0 \leq n \leq 1986,\ f(n) < 1987\}$ conjuntament amb $\{n | 0 \leq n \leq 1986,\ f(n) \geq 1987\}$ serien conjunts d'igual cardinal formant partició de $\{0, 1, ..., 1986\}$.

EF12. Feu inducció per a verificar que $f(m,n) < n+1$ per tot $n \leq m$.

EF13. Cal verificar per inducció que $f(n)$ es el nombre obtingut capgirant el desenvolupament binari de n. Resulta que el nombre buscat és 92.

EF14. Proveu que necessàriament $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(-2) = -1$ i que $f(x) = x+1$, per tot x racional.

EF15. Observeu que $4n + 9 = 2(2n + 3) + 3$ i $1789 = 2 \times 893 + 3...$ fins a veure que $f(1789) = 3581$.

EF16. Demostreu que l'equació és equivalent a l'equació multiplicativa de Cauchy $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, la qual en $\mathbb{Q}^+$ té infinites solucions (arbitraris en els primers).

EF17. Podeu veure que $f(x) = 0$ per tot x, tot establint primer que f és parella, o sigui $f(-z) = f(z)$.

EF18. Proveu que $f(0) = 0$ i $f(f(x)) = x$, deduint d'aquest fet que necessàriament $f(x) > x$, per tot x, la qual cosa podeu provar mirant que passaria si $f(x) > x$ o $f(x) < x$.

EF19. Un exemple curiós és $f(n) = [n(1+\sqrt{5})/2 + 1/2]$, on $[z]$ denota la part entera de z.

EF20. Proveu que $f(x) \neq x$ si $-1 < x < 0$ o $0 < x$. Deduïu d'aquí que $x + f(x) + xf(x) \equiv 0$ o sigui $f(x) = -x/(1+x)$.

REFERÈNCIES

Si voleu saber moltes coses d'equacions funcionals podeu consultar algún dels set llibres següents però s'us recomana molt especialment el primer per ser el llibre més important del tema.

[1] J. ACZÉL, Lectures on Functional Equations and Their Applications. Academic Press, New York-London, 1966.

[2] J. ACZÉL, A Short Course on Functional Equations. Reidel, Dordrecht, 1987.

[3] J. ACZÉL i J. DHOMBRES, Functional Equations in Several Variables. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] M. KUCZMA, Functional Equations in a Single Variable. Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

[5] M. KUCZMA, An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. P.W.N. Uniw. Slaski, Warszawa-Krakow-Katowice, 1985.

[6] M. KUCZMA, B. CHOCZEWSKI i R. GER, Iterative Functional Equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. Cambridge University Press. Cambridge, 1988.

[7] J. SMITAL, On Functions and Functional Equations, Adam Hilger, Bristol, 1988.